数理解析研究所講究録
第2032巻 2017年 21-33

Nonoscillation of quasi-periodic Mathieu equations with two frequencies

石橋 和葵 (Kazuki Ishibashi)
島根大学 大学院総合理工学研究科
Interdisciplinary Graduate School of
Science and Engineering, Shimane University

1 序文

遊具のブランコの一人乗りの揺らし方は，いくつかのパラメータを周期的に変化させることによって振幅が拡大する振動現象である．このような現象を**パラメータ励振**と呼ぶ．パラメータ励振系のメカニズムをもつ物理現象はブランコだけではなく，支点が上下する倒立振り子や鉄道車両におけるパンタグラフの架線からの離線現象などが挙げられる．

パラメータ励振の先駆的研究として，Mathieu [10] は楕円型太鼓膜の振動に関する研究を行い，次の２階線形微分方程式

$$x'' + (-\alpha + \beta\cos(2t))x = 0$$

を導いた（ただし，α と β は任意の実数である）．この方程式は後に彼の名前をとって**マシュー方程式**（*Mathieu equation*）と呼ばれている．パラメータ励振系の他の運動方程式もマシュー型方程式に帰着できる場合が多い．また，マシュー型方程式やそれを拡張した方程式は物理および工学分野において広く応用されている（例えば，[11] を参照せよ）．

マシュー方程式は次の方程式

$$\ddot{y} + (-\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\sin s)y = 0$$

に同値変換できる（ただし，$\cdot = d/ds$，$\tilde{\alpha} = \alpha/4$，$\tilde{\beta} = \beta/4$ である）．実際，マシュー方程式の解を $x(t)$ とし，$s = 2t + \pi/2$ かつ $y(s) = x(t)$ と変数変換をすれば

$$\dot{y} = x'\frac{dt}{ds} = \frac{1}{2}x'$$

であるから

$$\ddot{y} = \frac{1}{2}x''\frac{dt}{ds} = \frac{1}{4}\Big(\alpha - \beta\cos\Big(s - \frac{\pi}{2}\Big)\Big)x = \Big(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\sin s\Big)y$$

が得られる．マシュー方程式とその同値な方程式のすべての非自明解が振動するための十分条件は El-Sayed [5]，Leighton [9]，Sun et al. [15] によって既に得られている．

E-mail address: ishibashi_kazuaoi@yahoo.co.jp

最近，Ishibashi-Sugie [7] はマシュー方程式をより一般化した方程式

$$x'' + (-\alpha + \beta\cos(\omega t))x = 0 \tag{1.1}$$

の解の振動性を考察し，すべての非自明解が振動もしくは振動しないことを保証するパラメータ (α, β, ω) 条件を以下のように与えた．

定理 A.
もし

$$\alpha > 0 \quad \text{かつ} \quad |\beta| \geq \omega\sqrt{2\alpha} + \alpha$$

ならば，方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動する．

定理 B.
もし

$$\alpha \geq 0 \quad \text{かつ} \quad |\beta| \leq \frac{\omega\sqrt{2\alpha}}{2} + \alpha$$

ならば，方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動しない．

方程式 (1.1) において，正の実数 ω は周波数に相当している．定理 A と定理 B の条件から周波数 ω が大きいとき，方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動しにくく，小さいと振動しやすいことが分かる．また，定理 A の振動条件は先行研究 [5, 9, 15] を拡張している（詳しくは，[7] の第 4 節を見よ）．

方程式 (1.1) の係数項 $-\alpha + \beta\cos(\omega t)$ は言うまでもなく周期関数である．しかし，実際の物理モデルではしばしば係数項が非周期的なモデルが現れる．そのため，我々は係数項が非周期的な場合にも適用可能な結果を得るため，２つの周波数をもつ２階線形微分方程式

$$x'' + \big(-\alpha + \beta\cos(\omega_1 t) + \gamma\cos(\omega_2 t)\big)x = 0 \tag{1.2}$$

を考える．ここで，新たに加えたパラメータ γ は任意の実数であり，周波数 ω_1 と ω_2 は正の実数である．もし $\gamma = 0$ もしくは $\beta = 0$ のとき，方程式 (1.2) は方程式 (1.1) となる．また，$\omega_1 = \omega_2$ の場合も方程式 (1.1) に帰着できる．したがって，本稿では $\omega_1 \neq \omega_2$ を仮定して，話を進める．

方程式 (1.2) の係数項 $-\alpha + \beta\cos(\omega_1 t) + \gamma\cos(\omega_2 t)$ は，ω_1/ω_2 が有理数ならば，周期関数であり，ω_1/ω_2 が無理数ならば，周期関数ではない．後者の場合，方程式 (1.2) は**準周期マシュー方程式**（*quasi-periodic Mathieu equation*）と呼ばれている（例えば，[12, 22] を参照せよ）．準周期マシュー方程式の安定性理論は活発的に研究されている（[2, 4, 12, 22] を参照せよ）が，振動理論については報告されていない。

本稿では，方程式 (1.2) のすべての非自明解が振動しないことを保証する十分条件を与えたい．まず，解の振動性に関する基礎知識を紹介するため，方程式 (1.2) より一般的な方程式

$$x'' + c(t)x = 0 \tag{1.3}$$

を考える（ただし，係数 $c(t)$ は実連続関数である）．方程式 (1.3) の初期値に関する解の一意性とすべての解の時間大域的存在性は保証されているので，方程式 (1.3) のすべての解に対する解の振動性を議論することができる。方程式 (1.3) の非自明解が振動するとは，解が発散する無限個の零点列をもつときをいう．すなわち，方程式 (1.3) のある非自明解 $x(t)$ に対して

$$x(t_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty$$

を満たす数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するとき，その解は**振動する**という．逆に，方程式 (1.3) の非自明解が振動しないとは，解が有限個の零点しかもたないときをいう。すなわち，方程式 (1.3) のある非自明解が十分大きな時刻 t^* に対して

$$x(t) \neq 0 \quad (t \geq t^*)$$

を満たすとき，その解は**振動しない**という．また，方程式 (1.3) のような線形微分方程式の場合，スツルムの分離定理から，一つの解が振動しないならば，すべての非自明解も振動しないことがよく知られている（例えば，[16, p. 5] を見よ）.

方程式 (1.3) に対する振動問題は古くから現在まで研究されてきた．例えば，スツルムの比較定理（[16, p. 45] 参照）から，十分大きな時刻 t に対して，係数 $c(t)$ が非正ならば，方程式 (1.3) のすべての非自明解は振動しない．また，係数 $c(t)$ が

$$\int^{\infty} c(t)dt = \infty$$

を満たすならば，方程式 (1.3) のすべての非自明解は振動する．これは Leighton-Wintner の振動定理と呼ばれている（[16, p. 45] を見よ）.

これらの結果を方程式 (1.2) に適応すれば

$$\alpha \geq |\beta| + |\gamma| \tag{1.4}$$

ならば，方程式 (1.2) のすべての非自明解は振動しない．実際，任意の $t \geq 0$ に対して

$$-\alpha + \beta\cos(\omega_1 t) + \gamma\cos(\omega_2 t) \leq -\alpha + |\beta| + |\gamma| \leq 0$$

であるから，方程式 (1.2) のすべての非自明解は振動しないことが分かる．また，Leighton-Wintner の振動定理から

$$\begin{aligned}\int_0^t \big(-\alpha + \beta\cos(\omega_1 s) + \gamma\cos(\omega_2 s)\big)ds &= \Big[-\alpha s + \frac{\beta}{\omega_1}\sin(\omega_1 s) + \frac{\gamma}{\omega_2}\sin(\omega_2 s)\Big]_0^t \\ &= -\alpha t + \frac{\beta}{\omega_1}\sin(\omega_1 t) + \frac{\gamma}{\omega_2}\sin(\omega_2 t) \\ &\geq -\alpha t - \frac{\beta}{\omega_1} - \frac{\gamma}{\omega_2}\end{aligned}$$

を得る。したがって，$t \to \infty$ のとき，$\alpha < 0$ ならば，方程式 (1.2) のすべての非自明解は振動する．以上の理由から，考察すべき場合は

$$0 \leq \alpha < |\beta| + |\gamma| \tag{1.5}$$

である．本稿では，(1.5) の場合にも適用可能な方程式 (1.2) のすべての非自明解が振動しないことを保証する条件を報告する．

定理 1.1.

$\alpha \geq |\gamma|$ と仮定する．もし

$$|\beta| + |\gamma| \leq \frac{\omega_1\sqrt{2(\alpha - |\gamma|)}}{2} + \alpha \tag{1.6}$$

ならば，方程式 (1.2) のすべての非自明解は振動しない．

定理 1.2.

$\alpha \geq |\beta|$ と仮定する．もし

$$|\beta| + |\gamma| \leq \frac{\omega_2\sqrt{2(\alpha - |\beta|)}}{2} + \alpha \tag{1.7}$$

ならば，方程式 (1.2) のすべての非自明解は振動しない．

方程式 (1.2) において，２つの周波数比 ω_1/ω_2 が有理数であれば，係数は周期関数であるが，比が無理数であれば，係数は周期関数ではない．したがって，比が無理数であるときは，ヒル方程式（Hill equation）には属さない．定理 1.1 と定理 1.2 は方程式 (1.2) の係数が周期的であってもなくても適用することができる．パラメータ γ が零であるとき，方程式 (1.2) の周波数は 1 種類となるので，$\omega_1 = \omega$ とみなしてよい．したがって，このとき，定理 1.1 は定理 B に一致する．同様に，パラメータ β が零であるとき，$\omega_2 = \omega$ となり，定理 1.2 は定理 B に一致する．

本稿の構成は次の通りである．第 2 節では，相平面解析を利用して得られる非振動定理を紹介する．第 3 節では，2 節で紹介した非振動定理を利用して，定理 1.1 を証明する．定理 1.2 は，定理 1.1 と同様な手法で証明できるため，省略する．

2 減衰項付き 2 階線形微分方程式の非振動定理

2 階線形微分方程式

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{2.1}$$

を考える．ただし，$a(t)$ は連続的微分可能かつ $b(t)$ は連続関数である．一般に方程式 (2.1) の左辺の第二項を**減衰項**と呼び，左辺の第三項を**復元項**と呼ぶ．この方程式は，振り子やバネの運動などの振動現象を記述する微分方程式のモデルとして有名であり，純粋数学のみならず応用化学，工学の分野で取り扱われる．このような理由から，方程式 (2.1) やそれを一般化した非線形微分方程式のすべての非自明解が振動または振動しないことを保証する条件を見つけるため，多くの論文が挙げられている．例えば，参考文献として [1, 3, 6, 8, 13, 14, 17–21] を挙げることができる．

この節では，[14] を参考にして，相平面解析を用いることで，定理 1.1 及び定理 1.2 を証明するために必要な非振動定理を紹介する．

任意の実数 h と k は $h \geq k > 0$ を満たすとして，次の台形領域

$$T(h,k) = \left\{(u,v)\colon 2h-k \leq u \leq 2h+k \ \text{ and } \ 0 \leq v \leq hu-h^2\right\}$$

を定義する．このとき，以下の非振動定理を与える．

定理 2.1.

十分大きな時刻 t_0 で，任意の $t \geq t_0$ に対して，

$$(a(t), b(t)) \in T(\rho, \sigma)$$

を満たすような，ある実数 ρ と σ が存在すると仮定する．ただし，実数 ρ と σ は $\rho \geq \sigma > 0$ を満たす．このとき，方程式 (2.1) のすべての非自明解は振動しない．

注意 2.1. 台形領域 $T(h,k)$ は領域

$$D = \left\{(u,v)\colon u \geq 0 \ \text{ and } \ 0 \leq v \leq u^2/4\right\}$$

内に含まれる．なぜなら，$(u,v) \in T(h,k)$ のとき，$u \geq 2h-k \geq h > 0$ かつ

$$\begin{aligned} 0 \leq v \leq hu-h^2 &= \frac{u^2}{4} - \left(\frac{u^2}{4} - hu + h^2\right) \\ &= \frac{u^2}{4} - \left(\frac{u}{2} - h^2\right)^2 \leq \frac{u^2}{4} \end{aligned}$$

であるから，$(u,v) \in D$ となる．

定理 2.1 の証明. 方程式 (2.1) は振動する解 $y(t)$ をもつとする．$z = y'$ とおくとき，方程式 (2.1) は方程式系

$$y' = z, \quad z' = -b(t)y - a(t)z \tag{2.2}$$

となる．方程式 (2.1) は振動する解をもつことから，方程式系 (2.2) の正の解軌跡は無限時間原点のあたりを時計回り方向に回転する．

以下，集合 $T = T(\rho,\sigma)$ と表す．任意の $t \geq t_0$ に対して，$(a(t), b(t)) \in T$ の仮定から，ある時刻 t で

$$0 \leq b(t) \leq \rho a(t) - \rho^2 \tag{2.3}$$

が成り立つ．また $a(t)$ が有界であるから

$$u_0 = \sup_{t \geq t_0} a(t) \quad \text{かつ} \quad v_0 = \rho u_0 - \rho^2 \tag{2.4}$$

とする．ただし，$0 < \rho \leq 2\rho - \sigma \leq u_0 \leq 2\rho + \sigma$ である．$t_1 \geq t_0$ に対して，$a(t_1) = u_0$ となるような時刻 t_1 を決める．このとき，$t_1 = \infty$ の場合も考えられる．集合 T は閉集合であるから，$(u_0, b(t_1)) \in T$ である．また，(2.3) と (2.4) から

$$0 \leq b(t_1) \leq \rho u_0 - \rho^2 = v_0$$

が分かる．

方程式系 (2.2) の正の解軌跡と比較することを目的に，(2.4) で定めた u_0 と v_0 を係数にもつ方程式系

$$y' = z, \quad z' = -v_0 y - u_0 z \tag{2.5}$$

を考える．(2.4) で定めた $v_0 = \rho u_0 - \rho^2$ を考慮すると，方程式系 (2.5) は解 $(y(t), z(t)) = (-e^{-\rho t}, \rho e^{-\rho t})$ をもつ．さらに，方程式系 (2.5) の解曲線は任意の $y < 0$ に対して，$z = -\rho y$ によって与えられる．また

$$\rho = \frac{\rho^2}{u_0} + \frac{v_0}{u_0} > \frac{v_0}{u_0}$$

であることから，領域

$$R_2 = \left\{(y, z) \colon y < 0 \ \text{ and } \ -(v_0/u_0)y < z < -\rho y\right\}$$

を定義する．領域 R_2 は (y, z) 平面において，第 2 象限である．

以下，方程式系 (2.2) と方程式系 (2.5) のベクトル場について考える．方程式系 (2.2) のベクトル場から，方程式系 (2.2) の正の解軌跡は無限時間原点のあたりを時計回り方向に回転していた．したがって，任意の $t = \tau \geq t_0$ に対して，方程式系 (2.2) の正の解軌跡が通り抜ける点 $P \in R_2$ を $P = (y_1, z_1)$ とする．このとき，任意の $y < 0$ に対して，

$$y_1 < 0 < z_1 < -\rho y_1 \tag{2.6}$$

であることに注意して，点 P から出発する方程式系 (2.2) の正の解軌跡を $\Gamma^+(P)$ と表す．一方，$\Gamma^+(P)$ と比較するため，点 P から出発する方程式系 (2.5) の正の解軌跡を $\gamma^+(P)$ とする．方程式系 (2.5) が自励系であることから，$\gamma^+(P)$ は解曲線 $z = -\rho y$ に交わらないことは初期値問題の一意性から分かる．領域 R_2 内において，方程式系 (2.5) のベクトル場を考慮すれば，$\gamma^+(P)$ は $x \to 0^-$ のとき，原点に近づくことが分かる．一方，$\Gamma^+(P)$ が領域 R_2 を去るとき，正の z 軸にぶつかる．なぜなら，正の解軌跡 $\Gamma^+(P)$ は時計回り方向に回転しているからである．$\gamma^+(P)$ と $\Gamma^+(P)$ の動きから，それぞれの正の解軌跡の傾きは

$$-\frac{u_0 z_1 + v_0 y_1}{z_1} \leq -\frac{a(\tau) z_1 + b(\tau) y_1}{z_1} \tag{2.7}$$

をみたす点 P をとることができる．ただし，必要ならば R_2 内の他の点と点 P を変更することは可能である．(2.3) と (2.4) から

$$\begin{aligned} v_0 - b(\tau) &= \rho u_0 - \rho^2 - b(\tau) \\ &\geq \rho a(\tau) - \rho^2 - b(\tau) \geq 0 \end{aligned}$$

であることに注意して，(2.3) と (2.6) を利用すれば

$$
\begin{aligned}
a(\tau)z_1 + b(\tau)y_1 &= u_0 z_1 + v_0 y_1 - (u_0 - a(\tau))z_1 - (v_0 - b(\tau))y_1 \\
&> u_0 z_1 + v_0 y_1 - (u_0 - a(\tau))z_1 + (v_0 - b(\tau))\frac{z_1}{\rho} \\
&= u_0 z_1 + v_0 y_1 - (u_0 - a(\tau))z_1 + \left(\rho u_0 - \rho^2 - b(\tau)\right)\frac{z_1}{\rho} \\
&= u_0 z_1 + v_0 y_1 + z_1\left(a(\tau) - \rho - \frac{b(\tau)}{\rho}\right) \\
&\geq u_0 z_1 + v_0 y_1
\end{aligned}
$$

を得る．したがって，(2.7) に矛盾する．ゆえに，方程式 (2.1) のすべての非自明解は振動しない． □

3 主定理の証明

定理 1.1 を証明するため，方程式 (1.3) と減衰項をもつ方程式 (2.1) の同値変換を与える．方程式 (1.3) に対して，

$$
x = y \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t a(\tau)d\tau\right)
$$

とする．次の条件

$$
\frac{1}{4}a^2(t) + \frac{1}{2}a'(t) + c(t) = b(t) \tag{3.1}
$$

が成立するならば

$$
\begin{aligned}
x'' + c(t)x &= \left(y'' + a(t)y' + \left(\frac{1}{4}a^2(t) + \frac{1}{2}a'(t) + c(t)\right)y\right) \times \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t a(\tau)d\tau\right) \\
&= \left(y'' + a(t)y' + b(t)\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t a(\tau)d\tau\right)
\end{aligned}
$$

であることから，方程式 (1.3) のすべての非自明解が振動しないことと，方程式 (2.1) のすべての非自明解が振動しないことは同値である．この同値変換と定理 2.1 を用いて，定理 1.1 の証明を行う．

定理 1.1 の証明. Leighton-Wintner の振動定理から，$\alpha < 0$ の場合の方程式 (1.2) のすべての非自明解が振動することは第 1 節で述べた．したがって，$\alpha \geq 0$ とする．最初に $\beta \geq 0$ の場合を考える．$\alpha = |\gamma|$ のとき，定理 1.1 の条件 (1.6) から $\beta = 0$ であり，方程式 (1.2) は

$$
x'' + \alpha(-1 + \cos(\omega_2 t))x = 0 \tag{3.2}
$$

となる．方程式 (3.2) の係数は任意の $t > 0$ に対して

$$
\alpha(-1 + \cos(\omega_2 t)) \leq 0
$$

である．したがって，スツルムの比較定理から方程式 (3.2) のすべての非自明解は振動しない．以下，$\alpha > |\gamma|$ の場合を考える．

第 1 節でも紹介したが，条件 (1.4) ならば，方程式 (1.2) のすべての非自明解は振動しない．したがって，条件 (1.5) と $\alpha > |\gamma|$ の仮定のもとで証明を続ける．

ここで，ある 2 つの定数 ρ と σ を

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\beta + |\gamma| - \alpha}{\omega_1} + \sqrt{\frac{(\beta + |\gamma| - \alpha)^2}{\omega_1^2} + 2\alpha}, \\ \sigma &= \frac{2(\beta + |\gamma| - \alpha)}{\omega_1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

と定める。ただし，条件 (1.5) から ρ と σ は $\rho \geq \sigma > 0$ を満たして，α と β，γ に依存する正の実数である。さらに，(3.3) を用いて，方程式 (2.1) の係数項 $a(t)$ と $b(t)$ を

$$\begin{aligned} a(t) &= 2\rho - \sigma \sin(\omega_1 t), \\ b(t) &= \alpha + \rho\sigma\big(1 - \sin(\omega_1 t)\big) + (\alpha - |\gamma|)\cos(\omega_1 t) + \gamma \cos(\omega_2 t) + \frac{\sigma^2}{4}\sin^2(\omega_1 t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

と定めれば，直接計算から (3.1) を満たす．したがって，(3.4) をもつ方程式 (2.1) と方程式 (1.2) は同値である．

以下，(3.4) をもつ方程式 (2.1) が定理 2.1 を満たすことを確認していく．$\alpha > |\gamma|$ と (3.3) から，任意の $t > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(\beta + |\gamma| - \alpha)^2}{\omega_1^2} + 2\alpha} = 2\rho - \sigma \leq a(t) \\ \leq 2\rho + \sigma = \frac{4(\beta + |\gamma| - \alpha)}{\omega_1} + 2\sqrt{\frac{(\beta + |\gamma| - \alpha)^2}{\omega_1^2} + 2\alpha} \end{aligned}$$

かつ

$$b(t) \geq \frac{\sigma^2}{4}\sin^2(\omega_1 t) \geq 0$$

であり，さらに任意の $t > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}a^2(t) - b(t) &= \rho^2 - \alpha - \rho\sigma - (\alpha - |\gamma|)\cos(\omega_1 t) - \gamma\cos(\omega_2 t) \\ &= \alpha - (\alpha - |\gamma|)\cos(\omega_1 t) - \gamma\cos(\omega_2 t) \\ &\geq \alpha - (\alpha - |\gamma|) - |\gamma| = 0 \end{aligned}$$

が分かる．したがって，任意の $t > 0$ に対して，$(a(t), b(t)) \in D = \big\{(u, v) \colon u \geq 0 \text{ and } 0 \leq v \leq u^2/4\big\}$ である．

ここで，$u = a(t)$ かつ $v = b(t)$ とおく．(3.4) から，$2\rho - \sigma \leq u \leq 2\rho + \sigma$ 及び

$$\sin(\omega_1 t) = \frac{2\rho - u}{\sigma} \quad \text{かつ} \quad \cos(\omega_1 t) = \pm\sqrt{1 - \frac{(2\rho - u)^2}{\sigma^2}}$$

であるから

$$v = \alpha + \rho\sigma - \rho(2\rho - u) \pm (\alpha - |\gamma|)\sqrt{1 - \frac{(2\rho - u)^2}{\sigma^2}} + \gamma\cos(\omega_2 t) + \frac{(2\rho - u)^2}{4}$$

を得る．いま，$2\rho - \sigma \leq u \leq 2\rho + \sigma$ に対して，２つの関数 $g_+(u)$ と $g_-(u)$ を

$$g_+(u) = \alpha + \rho\sigma - \rho(2\rho - u) + (\alpha - |\gamma|)\sqrt{1 - \frac{(2\rho - u)^2}{\sigma^2}} + |\gamma| + \frac{(2\rho - u)^2}{4}$$

かつ

$$g_-(u) = \alpha + \rho\sigma - \rho(2\rho - u) - (\alpha - |\gamma|)\sqrt{1 - \frac{(2\rho - u)^2}{\sigma^2}} - |\gamma| + \frac{(2\rho - u)^2}{4}$$

と定義して，領域 S を

$$S = \{(u, v)\colon 2\rho - \sigma \leq u \leq 2\rho + \sigma \ \text{ and } \ g_-(u) \leq v \leq g_+(u)\}$$

と定める．明らかに領域 S は有界かつ閉じた集合であり，任意の $t > 0$ に対して，$(a(t), b(t)) \in S$ である．簡単のため，関数 $g_+(u)$ と $g_-(u)$ を

$$g_+(u) = \frac{u^2}{4} - (\alpha - |\gamma|)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{(2\rho - u)^2}{\sigma^2}}\right)$$

及び

$$g_-(u) = \frac{u^2}{4} - (\alpha + |\gamma|) - (\alpha - |\gamma|)\sqrt{1 - \frac{(2\rho - u)^2}{\sigma^2}}$$

と書き換える．$2\rho - \sigma \leq u \leq 2\rho + \sigma$ と $\alpha > |\gamma|$ を考慮すると，

$$g_+(u) \leq \frac{u^2}{4}$$

かつ

$$\begin{aligned} g_-(u) &\geq \rho^2 - \rho\sigma + \frac{\sigma^2}{4} - (\alpha + |\gamma|) - (\alpha - |\gamma|) \\ &= 2\alpha + \rho\sigma - \rho\sigma + \frac{\sigma^2}{4} - (\alpha + |\gamma|) - (\alpha - |\gamma|) \\ &= \frac{\sigma^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

であるから，第２節の注意2.1で紹介した領域 D 内に領域 S は存在することが分かる．また，曲線 $v = u^2/4$ と $v = g_+(u)$ は点 $(2\rho, \rho^2)$ において唯一の共通接線をもつ．共通接線は $v = \rho u - \rho^2$ で与えられる．実際，簡単のため，$f(u) = u^2/4$ とおく．$2\rho - \sigma \leq u \leq 2\rho + \sigma$ に対して，関数 $f(u)$ と $g_+(u)$ の導関数は

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}f(u) &= \frac{u}{2}, \\ \frac{d}{du}g_+(u) &= \frac{u}{2} + \frac{(\alpha - |\gamma|)(2\rho - u)}{\sigma^2\sqrt{1 - \frac{(2\rho - u)^2}{\sigma^2}}} \end{aligned}$$

である．$2\rho-\sigma \le u \le 2\rho+\sigma$ に対して，接点の u 座標を u_* とすると，2 曲線 $f(u)$ と $g_+(u)$ が接する条件は

$$f(u_*) = g_+(u_*), \tag{i}$$

$$\frac{d}{du}f(u)\Big|_{u=u_*} = \frac{d}{du}g_+(u)\Big|_{u=u_*} \tag{ii}$$

である．条件 (i) と (ii) から，$f(u)$ と $g_+(u)$ の接点は $(2\rho,\rho^2)$ が分かり，接線の方程式は $v=\rho u-\rho^2$ を得る．

以下，関数 $g_+(u)$ が共通接線 $v=\rho u-\rho^2$ 以下であることを示す．すなわち，$2\rho-\sigma \le u \le 2\rho+\sigma$ に対して，$v=\rho u-\rho^2 \ge g_+(u)$ であること示すため，関数 $G(u)$ を

$$\begin{aligned}G(u) &= \rho u-\rho^2-g_+(u)\\ &= \rho u-\rho^2-\frac{u^2}{4}+(\alpha-|\gamma|)\left(1-\sqrt{1-\frac{(2\rho-u)^2}{\sigma^2}}\right)\end{aligned}$$

とおく．定理 1.1 の条件 (1.6) と関数 $G(u)$ の導関数が

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}G(u) &= \rho-\frac{u}{2}-\frac{(\alpha-|\gamma|)(2\rho-u)}{\sigma^2\sqrt{1-\dfrac{(2\rho-u)^2}{\sigma^2}}}\\ &= (2\rho-u)\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha-|\gamma|}{\sigma^2\sqrt{1-\dfrac{(2\rho-u)^2}{\sigma^2}}}\right)\end{aligned}$$

であるから，関数 $G(u)$ は唯一の極値 $u=2\rho$ をもつ．また，$G(2\rho)=0$ 及び

$$\frac{d}{du}G(u)\Big|_{u=2\rho}=0$$

が分かる．さらに，$2\rho-\sigma \le u \le 2\rho+\sigma$ に対して，条件 (1.6) に注意すれば

$$G(u)\Big|_{u=2\rho-\sigma} = \alpha-|\gamma|-\frac{\sigma^2}{4} \ge 0$$

かつ

$$G(u)\Big|_{u=2\rho+\sigma} = \alpha-|\gamma|-\frac{\sigma^2}{4} \ge 0$$

が分かる．以上のことから，関数 $G(u)$ は $u=2\rho$ に関して対象なグラフであり，$2\rho-\sigma \le u \le 2\rho+\sigma$ に対して，$G(u)\ge 0$ である．したがって，関数 $g_+(u)$ が共通接線 $v=\rho u-\rho^2$ 以下であるから，集合 S は台形領域

$$T(\rho,\sigma)=\left\{(u,v)\colon 2\rho-\sigma \le u \le 2\rho+\sigma \ \text{ and } \ 0\le v \le \rho u-\rho^2\right\}$$

内に含まれる（図 1 を参照せよ）．ゆえに，十分大きな時刻 t に対して，$(a(t),b(t))\in T(\rho,\sigma)$ であることが分かる．この事実は，定理 2.1 を満たしている．したがって，(3.4) をもつ方

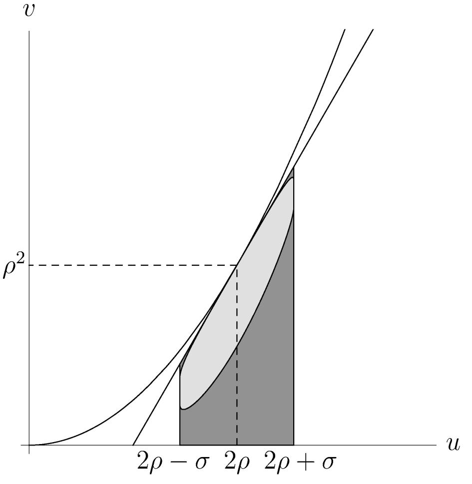

図 1: $\alpha = 3, \beta = 3, \gamma = 1, \omega_1 = 1$ のときの集合 S と台形領域 T.

程式 (2.1) のすべての非自明解が振動しないことが分かる．すなわち，(3.4) をもつ方程式 (2.1) と方程式 (1.2) は同値であるから，方程式 (1.2) のすべての非自明解も振動しないことが分かる．

最後に $\beta < 0$ の場合を考える．方程式 (1.2) に対して

$$s = t - \frac{\pi}{\omega_1} \quad \text{かつ} \quad z(s) = x(t)$$

と変数変換すれば，任意の $s \geq 0$ に対して

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \left(-\alpha - \beta\cos(\omega_1 s) + \gamma\cos\left(\omega_2 s + \frac{\omega_2}{\omega_1}\pi\right)\right) z = 0 \tag{3.5}$$

を得る．言うまでもなく，方程式 (1.2) のすべての非自明解が振動しないことと，方程式 (3.5) が振動しないことは同値である．ここで，ある 2 つの定数 $\tilde{\rho}$ と $\tilde{\sigma}$ を

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{|\gamma| - \beta - \alpha}{\omega_1} + \sqrt{\frac{(|\gamma| - \beta - \alpha)^2}{\omega_1^2} + 2\alpha}, \\ \tilde{\sigma} &= \frac{2(|\gamma| - \beta - \alpha)}{\omega_1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

と定める。ただし，条件 (1.5) から $\tilde{\rho}$ と $\tilde{\sigma}$ は $\tilde{\rho} \geq \tilde{\sigma} > 0$ を満たす．さらに，(3.6) を用いて，方程式 (2.1) の係数項 $\tilde{a}(s)$ と $\tilde{b}(s)$ を

$$\begin{aligned} \tilde{a}(s) &= 2\rho - \sigma\sin(\omega_1 s), \\ \tilde{b}(s) &= \alpha + \rho\sigma\bigl(1 - \sin(\omega_1 s)\bigr) + (\alpha - |\gamma|)\cos(\omega_1 s) \\ &\qquad + \gamma\cos\left(\omega_2 s + \frac{\omega_2}{\omega_1}\pi\right) + \frac{\sigma^2}{4}\sin^2(\omega_1 s) \end{aligned} \tag{3.7}$$

と定めると，直接計算から条件 (3.1) を満たす．したがって，(3.7) をもつ方程式 (2.1) と方程式 (3.4) は同値である．$\beta \geq 0$ の場合と同様に (3.7) をもつ方程式 (2.1) に対して，定理 2.1 を用いると，$\beta < 0$ の場合も証明できる． □

参考文献

[1] R. P. Agarwal, S. R. Grace and D. O'Regan, *Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[2] H. Broer, J. Puig and C. Simo, Resonance tongues and instability pockets in the quasi-periodic Hill-Schrodinger equation, Commun. Math. Phys., **241** (2003), 467–503.

[3] D. Çakmak, A note on M. K. Kwong and J. S. W. Wong's paper, Dynam. Systems Appl., **15** (2006), 409-414.

[4] S. Davis and S. Rosenblat, A quasiperiodic Mathieu-Hill equation, SIAM J. Appl., **38** (1980), 139–155.

[5] M. A. El-Sayed, An oscillation creterion for a forced second order linear differential equation, Proc. Amer. Math. Soci., **118** (1993), 813–817.

[6] W. B. Fite, Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., **19** (1918), 341–352.

[7] K. Ishibashi and J. Sugie, Simple conditions for parametrically excited oscillations of generalized Mathieu equations, J. Math. Anal. Appl., **446** (2017), 233–247.

[8] M. K. Kwong and J. S. W. Wong, Oscillation and nonoscillation of Hill's equation with periodic damping, J. Math. Anal. Appl., **288** (2003), 15–19.

[9] W. Leighton, Hill's equaiton revisited, J. Math. Anal. Appl., **114** (1986), 497–502.

[10] É. Mathieu, Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme eliptique, J. Math. Pure. Appl., **13** (1868), 137–203.

[11] N. W. McLachan, *Theory and Application of Mathieu functions*, Dover, New York, 1964.

[12] R. Rand and T. Morrison, 2: 2: 1 resonance in the quasi-periodic Mathieu equation, Nonlinear Dynam., **40** (2005), 195–203.

[13] J. Sugie and K. Matsumura, A nonoscillation theorem for half-linear differential equations with periodic coefficients, Appl. Math. Comput., **199** (2008), 447–455.

[14] J. Sugie, Geometrical conditions for oscillation of second-order half-linear differential equations, Acta. Math. Hungar., **118** (2008), 369–394.

[15] Y. G. Sun, C. H. Ou, J. S. W. Wong, Interval oscillation theorems for a second-order linear differential equation, Comput Math. Appl., **48** (2004), 1693–1699.

[16] C. A. Swanson, *Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, 48, Academic Press, New York and London, 1968.

[17] J. S. W. Wong, On a theorem of Sobol, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, **27** (1999), 253–264.

[18] J. S. W. Wong, On Kamenev-type oscillation theorems for second-order differential equations with damping, J. Math. Anal. Appl., **258** (2001), 244–257.

[19] J. Yan, A note on an oscillation criterion for an equation with damped term, Proc. Amer. Math. Soci., **90** (1984), 277–280.

[20] J. Yan, Oscillation theorems for second order linear differential equations with damping, Proc. Amer. Math. Soci., **98** (1986), 276–282.

[21] Z. Zheng, Note on Wong's paper, J. Math. Anal. Appl., **274** (2002), 466–473.

[22] R. S. Zounes and R. H. Rand, Transition curves in the quasi-periodic Mathieu equation, SIAM J. Appl. Math., **58** (1998), 1094–1115.